

23 СТЕРЕОМЕТРИЯ

Стереометрией называют раздел геометрии, в котором изучают свойства пространственных фигур. Простейшими фигурами в пространстве являются *точка, прямая и плоскость*.

23.1. Свойства прямых и плоскостей

Две прямые в пространстве параллельны, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Две прямые в пространстве скрещиваются, если не существует такой плоскости, в которой они обе лежат.

Признак скрещивающихся прямых. Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые скрещиваются.

Плоскость и прямая, не принадлежащая плоскости, параллельны, если они не имеют общих точек.

Признак параллельности прямой и плоскости. Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-либо прямой, принадлежащей плоскости, то она параллельна и плоскости.

Свойства плоскости и прямой, параллельной плоскости:

1) если плоскость содержит прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой;

2) если через каждую из двух параллельных прямых проведены пересекающиеся плоскости, то линия их пересечения параллельна данным прямым.

Две плоскости параллельны, если они не имеют общих точек.

Признак параллельности плоскостей: если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, принадлежащей плоскости.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости: если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна плоскости.

Свойства прямой, перпендикулярной плоскости:

- 1) если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости;
- 2) прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных плоскостей, перпендикулярна и другой плоскости.

Признак перпендикулярности плоскостей: если плоскость содержит перпендикуляр к другой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Прямая, пересекающая плоскость, но не перпендикулярная к ней, называется наклонной к плоскости.

Теорема о трех перпендикулярах. Для того чтобы прямая, лежащая в плоскости, была перпендикулярна наклонной, необходимо и достаточно, чтобы она была перпендикулярна проекции этой наклонной на плоскость.

На рисунке 23.1 прямая b – наклонная к плоскости, прямая c – проекция этой наклонной на плоскость и поскольку $a \perp c$, то $a \perp b$.

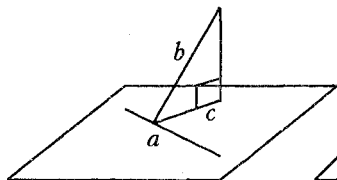


Рис. 23.1

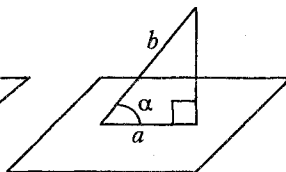


Рис. 23.2

Угол между наклонной и плоскостью называется угол между наклонной и ее проекцией на плоскость. На рисунке 23.2 прямая b – наклонная к плоскости, прямая a – проекция этой наклонной на плоскость, α – угол между этой наклонной и плоскостью.

Двугранный угол образуется в результате пересечения двух плоскостей. Прямая, полученная в результате пересечения двух плоскостей, называется **ребром** двугранного угла. Две полуплоскости с общим ребром называются **гранями** двугранного угла.

Полуплоскость, граница которой совпадает с ребром двугранного угла и которая делит двугранный угол на два равных угла, называется **биссекторной** плоскостью.

Двугранный угол измеряется соответствующим **линейным углом**. Линейным углом двугранного угла называется угол между перпендикулярами, проведенными в каждой грани к ребру.

23.2. Призма

Многогранник, две грани которого равные n – угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные n граней – параллелограммы, называется *n -угольной призмой*.

Два n -угольника являются основаниями призмы, параллелограммы – боковыми гранями. Стороны граней называются *ребрами* призмы, а концы ребер – *вершинами* призмы.

Высотой призмы называется отрезок перпендикуляра, заключенный между основаниями призмы.

Диагональю призмы называется отрезок, соединяющий две вершины оснований, не лежащие в одной грани.

Прямой призмой называется призма, боковые ребра которой перпендикулярны плоскостям оснований (рис. 23.3).

Наклонной призмой называется призма, боковые ребра которой являются наклонными к плоскостям оснований (рис. 23.4).

Объем и площадь поверхности призмы высоты h находят по формулам:

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h, \quad S_{\text{пов.}} = 2S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}}$$

Площадь **боковой поверхности прямой призмы** можно вычислить по формуле $S_{\text{бок.}} = P_{\text{осн.}} \cdot h$.

Объем и площадь поверхности наклонной призмы (рис. 23.4) можно вычислить также иначе: $V = S_{\text{сеч.}} \cdot l, \quad S_{\text{бок.}} = P_{\text{сеч.}} \cdot l$,

где $\triangle PNK$ – сечение, перпендикулярное ребру l .

Правильной призмой называется прямая призма, основанием которой является правильный многоугольник.

Параллелепипедом называется призма, все грани которой – параллелограммы.

Прямым параллелепипедом называется параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны плоскостям оснований.

Прямоугольным параллелепипедом называется прямой параллелепипед, основанием которого является прямоугольник.

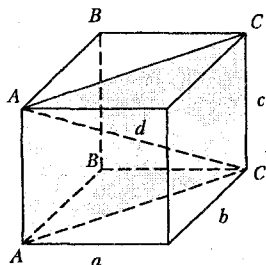


Рис. 23.3

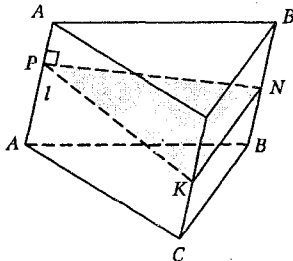


Рис. 23.4

Свойство диагонали прямоугольного параллелепипеда

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, где a, b, c – длины ребер, выходящих из одной вершины, d – диагональ параллелепипеда (рис. 23.3).

Объем прямоугольного параллелепипеда находят по формуле

$$V = abc.$$

Кубом называется прямоугольный параллелепипед с равными ребрами. Все грани куба – квадраты.

Объем, площадь поверхности и диагональ куба с ребром a находят по формулам:

$$V = a^3, S_{\text{пов.}} = 6a^2, d^2 = 3a^2.$$

23.3. Пирамида

Многогранник, одна грань которого – многоугольник, а остальные грани – треугольники с общей вершиной, называется *пирамидой*. Многоугольник называется основанием пирамиды, а треугольники – боковыми гранями.

Высотой пирамиды называется отрезок перпендикуляра, проведенного из вершины пирамиды к плоскости основания.

Если все боковые ребра пирамиды равны или наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, то высота опускается в центр *описанной окружности*.

Если боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом (*двугранные углы при основании равны*), то высота опускается в центр *вписанной окружности*.

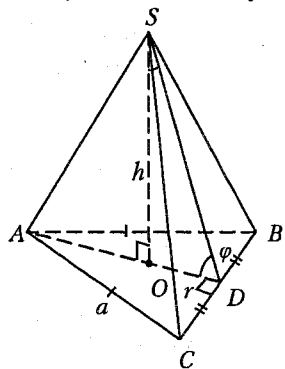


Рис. 23.5

Пирамида называется *правильной*, если ее основанием является правильный многоугольник, а высота опускается в центр вписанной и описанной окружности многоугольника, лежащего в основании пирамиды. Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из её вершины, называется *апофемой*.

Например, на рисунке 23.5 изображена **правильная треугольная** пирамида $SABC$ (тетраэдр): $AB = BC = AC = a$, $OD = r$ – радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , $OA = R$ – радиус ок-

ружности, описанной около треугольника ABC , $SO = h$ – высота пирамиды, $SD = l$ – апофема, $\angle SAO = \alpha$ – угол наклона бокового ребра SA к плоскости основания, $\angle SDO = \varphi$ – угол наклона боковой грани SBC к плоскости основания пирамиды.

Треугольная пирамида называется *тетраэдром*. Тетраэдр называется правильным, если все его ребра равны.

Объем пирамиды и площадь ее поверхности находят по формулам:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h, \quad S_{\text{пов.}} = S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}},$$

где h – высота пирамиды

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды находят по формуле $S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн.}} \cdot h_{\text{бок.}}$, где $h_{\text{бок.}}$ – апофема пирамиды.

Усеченной пирамидой называется многогранник, вершинами которого служат вершины основания пирамиды и вершины её сечения плоскостью, параллельной основанию пирамиды. Основания усеченной пирамиды – подобные многоугольники.

Объем усеченной пирамиды находят по формуле

$$V = \frac{1}{3} h (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}),$$

где S_1 и S_2 – площади оснований, h – высота усеченной пирамиды.

23.4. Правильные многогранники

Правильным многогранником называется выпуклый многогранник, у которого все грани – правильные многоугольники с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер.

Грани правильного многогранника могут быть или равносторонними треугольниками, или квадратами, или правильными пятиугольниками.

Если у правильного многогранника грани – правильные треугольники, то соответствующими многогранниками являются правильный *тетраэдр* (он имеет 4 грани), правильный *октаэдр* (он имеет 8 граней), правильный *икосаэдр* (он имеет 20 граней).

Если у правильного многогранника грани – квадраты, то многогранник называется *кубом* или *гексаэдром* (он имеет 6 граней).

Если у правильного многогранника грани – правильные пятиугольники, то многогранник называется *додекаэдром* (он имеет 12 граней).

23.5. Цилиндр

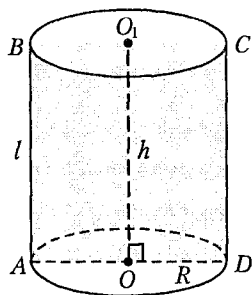


Рис. 23.6

Цилиндром называется фигура, полученная в результате вращения прямоугольника вокруг одной из его сторон.

На рисунке 23.6 прямая OO_1 – ось вращения; $OO_1 = h$ – высота, l – образующая; $ABCD$ – осевое сечение цилиндра, полученного вращением прямоугольника OO_1CD вокруг стороны OO_1 .

Объем и площадь поверхности цилиндра находят по формулам:

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h, \quad S_{\text{осн.}} = \pi R^2, \quad S_{\text{пов.}} = 2S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}}, \quad S_{\text{бок.}} = 2\pi Rl,$$

где R – радиус основания, h – высота, l – образующая цилиндра.

23.6. Конус

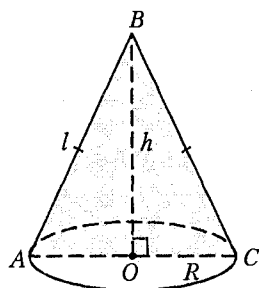


Рис. 23.7

Конусом называется фигура, полученная в результате вращения прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов. На рисунке 23.7 прямая OB – ось вращения; $OB = h$ – высота, l – образующая, $\triangle ABC$ – осевое сечение конуса, полученного вращением прямоугольного треугольника OBC вокруг катета OB .

Объем и площадь поверхности конуса находят по формулам:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h, \quad S_{\text{осн.}} = \pi R^2, \quad S_{\text{пов.}} = S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}}, \quad S_{\text{бок.}} = \pi Rl,$$

где R – радиус основания, h – высота, l – образующая конуса.

Усеченным конусом называется часть конуса, ограниченная его основанием и сечением, параллельным плоскости основания.

Площадь поверхности и объем усеченного конуса находят по формулам:

$$S_{\text{бок.}} = \pi(R_1 + R_2)l, \quad V = \frac{1}{3}\pi h(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2),$$

где R_1 и R_2 - радиусы оснований, h - высота усеченного конуса.

23.7. Сфера и шар

Сферой называется фигура, полученная в результате вращения полуокружности вокруг ее диаметра.

Площадь сферы радиуса R находят по формуле $S_{\text{сф.}} = 4\pi R^2$.

Шаром называется фигура, полученная вращением полукруга вокруг его диаметра.

Объем шара радиуса R находят по формуле $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Сечение шара плоскостью, проходящей через его центр, называется большим кругом.

Касательной плоскостью к сфере (шару) называется плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку. Эту точку называют точкой касания сферы и плоскости. Касательная плоскость перпендикулярна радиусу сферы в точке касания.

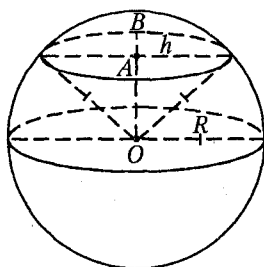


Рис. 23.8

Сферическим (шаровым) сегментом называется часть сферы (шара), отсекаемая плоскостью. Высотой h шарового сегмента называется длина отрезка диаметра, перпендикулярного основанию шарового сегмента, расположенного между этим основанием и сферой (на рис. 23.8 $AB = h$).

Площадь сферической поверхности и объем шарового сегмента находят по формулам:

$$S_{\text{нов.}} = 2\pi Rh, \quad V_{\text{сегм.}} = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h \right),$$

где R - радиус шара; h - высота сегмента.

Шаровым сектором называется тело, полученное вращением кругового сектора вокруг одного из ограничивающих круговой сектор радиусов. Высотой шарового сектора называется высота части его сферической поверхности.

Объем шарового сектора находят по формуле

$$V_{\text{сект.}} = \frac{2}{3} \pi R^2 h,$$

где R – радиус шара; h – высота сегмента.

23.8. Комбинации многогранников и тел вращения

1. Многогранник и шар.

Шар вписан в многогранник, если он касается всех граней многогранника.

Шар описан около многогранника, если все вершины многогранника лежат на поверхности шара.

Решение задач, как правило, необходимо начинать с определения расположения центра шара и радиуса шара.

В *прямоугольном параллелепипеде* с высотой h и диагональю d центром вписанного и описанного шара является точка пересечения диагоналей параллелепипеда; радиус вписанного шара находят по формуле $R_{\text{вн.}} = \frac{h}{2}$, а радиус описанного шара – по формуле $R_{\text{он.}} = \frac{d}{2}$.

В *произвольном многограннике* центром шара, вписанного в многогранник, является точка пересечения биссекторных плоскостей всех двугранных углов многогранника, а центром шара, описанного около многогранника, является точка пересечения всех плоскостей, проходящих через середины ребер многогранника и перпендикулярных им.

2. Комбинация тел вращения.

Шар вписан в конус, если он касается основания конуса в его центре, а боковой поверхности – по окружности. Центр шара находится на оси конуса и равноудален от центра основания и образующей конуса.

Шар описан около конуса, если вершина и окружность основания конуса лежат на поверхности шара. Центр шара лежит на прямой, содержащей ось конуса, и равноудален от вершины и точек окружности основания конуса.

Шар вписан в цилиндр, если он касается оснований цилиндра в их центрах, а боковой поверхности цилиндра по большой окружности шара, параллельной основаниям. Центр шара лежит на се-

редине оси цилиндра, а радиус шара находят по формуле $R_{\text{en.}} = \frac{h}{2}$, где h – высота цилиндра.

Шар описан около цилиндра, если окружности оснований цилиндра лежат на поверхности шара. Центр шара лежит на середине оси цилиндра, а радиус шара находят по формуле $R_{\text{он.}} = \frac{d}{2}$, где d – диагональ осевого сечения цилиндра.

Конус вписан в цилиндр, если основание конуса совпадает с одним из оснований цилиндра, а вершина конуса совпадает с центром другого основания цилиндра.

При решении задач целесообразно строить вспомогательное сечение, проходящее через ось цилиндра или конуса и центр шара. При этом в сечении цилиндра будет получаться прямоугольник, в сечении конуса – равнобедренный треугольник, в сечении шара – круг с радиусом, равным радиусу шара.

Тест для проверки теоретических знаний

Установите соответствие (1–7):

1. Призма:

ВИД	ХАРАКТЕРИСТИКА
1) правильная;	а) прямая призма, основание – правильный многоугольник;
2) прямая;	б) все грани – параллелограммы;
3) правильная прямоугольная;	в) все грани – квадраты;
4) параллелепипед;	г) боковые ребра – перпендикуляры к плоскостям оснований;
5) прямой параллелепипед;	д) боковые ребра наклонены к плоскости основания;
6) прямоугольный параллелепипед;	е) основание – правильный многоугольник;
7) куб.	ж) основание – параллелограмм, боковые грани – прямоугольники; з) основание – квадрат, боковые грани – прямоугольники; и) все грани – прямоугольники.

2. Пирамида:

ВИД	ХАРАКТЕРИСТИКА
1) правильная;	а) основание – правильный n -угольник;
2) тетраэдр;	б) основание – n -угольник;
3) правильный тетраэдр;	в) все грани – треугольники;
4) четырехугольная;	г) все грани – правильные треугольники;
5) правильная четырехугольная;	д) основание – прямоугольник;
6) n -угольная;	е) основание – квадрат, боковые ребра равны;
7) правильная треугольная.	ж) основание – правильный треугольник; з) основание – правильный n -угольник, боковые ребра равны; и) основание – правильный треугольник, боковые ребра равны.

3. Высота пирамиды:

ОПУСКАЕТСЯ	ПРИ УСЛОВИИ, ЧТО
1) в центр окружности, вписанной в основание;	а) ребра равны;
2) в центр окружности, описанной около основания;	б) основание – прямоугольный треугольник;
3) на середину гипотенузы;	в) основание – прямоугольный треугольник, ребра равны;
4) в точку, являющуюся центром вписанной и описанной окружностей основания.	г) правильный тетраэдр; д) двугранные углы при основании равны; е) тетраэдр.

4. Площадь боковой поверхности многогранника:

ФОРМУЛА	МНОГОГРАННИК
1) $S = 4a^2$;	а) правильная пирамида;
2) $S = P_{\text{осн.}} \cdot h$;	б) прямая призма;

ФОРМУЛА

$$3) S = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot h_{\text{бок}}.$$

МНОГОГРАННИК

в) куб с ребром a ;

г) призма;

д) пирамида.

5. Объем многогранника:

ФОРМУЛА

$$1) V = a^3;$$

$$2) V = S_{\text{осн}} \cdot h;$$

$$3) V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h;$$

МНОГОГРАННИК

а) наклонная призма, h – высота;

б) пирамида, h – высота;

в) усеченная пирамида, h – высота;

г) куб с ребром a ;

д) куб с ребром h .

6. Площадь поверхности тела вращения:

ФОРМУЛА

$$1) S = 4\pi R^2;$$

$$2) S = \pi R^2 + \pi Rl;$$

$$3) S = \pi R^2 + 2\pi Rl;$$

ТЕЛО ВРАЩЕНИЯ

а) конус, R – радиус основания, h – высота, l – образующая;

б) сфера радиуса R ;

в) цилиндр, R – радиус основания, h – высота, l – образующая;

г) усеченный конус.

7. Объем тела вращения:

ФОРМУЛА

$$1) V = \frac{2}{3} \pi R^2 h;$$

$$2) V = \frac{4}{3} \pi R^3;$$

$$3) V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h;$$

$$4) V = \frac{\pi h}{3} (R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2);$$

$$5) V = S_{\text{осн}} \cdot h.$$

ТЕЛО ВРАЩЕНИЯ

а) шар радиуса R ;

б) конус;

в) усеченный конус, R_1 и R_2 – радиусы оснований, h – высота;

г) цилиндр;

д) шаровой сектор, R – радиус шара, h – высота сегмента;

е) шаровой сегмент.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7
Вариант правильного ответа	1 - а; 2 - г; 3 - з; 4 - б; 5 - ж; 6 - и; 7 - в	1 - з; 2 - в; 3 - г; 4 - д; 5 - е; 6 - б; 7 - и	1 - а; 2 - д; 3 - в; 4 - г	1 - в; 2 - б; 3 - а	1 - г; 2 - а; 3 - б	1 - б; 2 - а; 3 - в	1 - д; 2 - а; 3 - б; 4 - в; 5 - г

Примеры

Пример 1. Вычислите объем правильного тетраэдра с ребром, равным a .

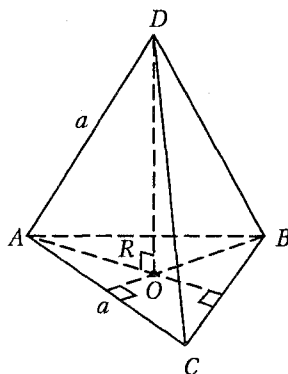


Рис. 23.9

Решение. Так как тетраэдр правильный (рис. 23.9), то его высота опускается в центр треугольника ABC : точку O , точку пересечения высот, биссектрис и медиан этого треугольника. Тогда $OA = R = \frac{a}{\sqrt{3}}$ – радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$; $DO = h$ – высота тетраэдра.

Найдем высоту тетраэдра. Рассмотрим треугольник AOD . По теореме Пифагора $OD^2 = AD^2 - AO^2$ или $h^2 = a^2 - R^2$.

$$\text{Тогда } h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2a^2}{3}} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}.$$

Объем тетраэдра вычислим по формуле $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} h$,

где $S_{\text{осн.}} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

$$\text{Запишем: } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$.

Пример 2. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной c , и острым углом 30° . Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60° . Найдите объем пирамиды.

Решение. Основанием пирамиды является треугольник ABC : $\angle C = 90^\circ$; $AB = c$ (рис. 23.10). Так как боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, то высота пирамиды опускается в центр окружности, описанной около этого треугольника (на рисунке 23.10 точка O). Тогда $AO = R = \frac{c}{2}$ и высота пирамиды $h = SO$.

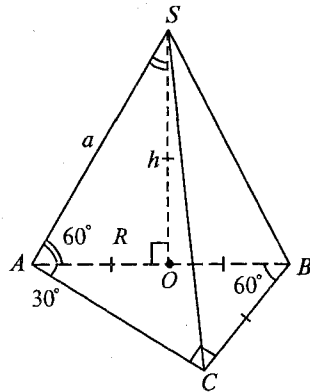


Рис. 23.10

Рассмотрим прямоугольный треугольник SAO . Угол SAO является углом наклона бокового ребра к плоскости основания, так как отрезок AO – проекция ребра AS на плоскость основания и $\angle SAO = 60^\circ$. Тогда $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{SO}{AO}$ и $SO = \frac{\sqrt{3}c}{2} = h$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC : $CB = \frac{c}{2}$ по свойству катета, лежащего против угла 30° ; $\angle B = 60^\circ$. Площадь треугольника найдем по формуле $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CB \cdot \sin \angle B$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} c \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}c^2}{8}$. Найдем объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h, V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}c^2}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}c}{2} = \frac{c^3}{16}.$$

Ответ: $\frac{c^3}{16}$.

Пример 3. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 5, 6 и 6 см. Боковые грани пирамиды образуют с ее основанием равные двугранные углы, содержащие по 45° . Определите объем пирамиды.

Решение. Основанием пирамиды (рис. 23.11) служит равнобедренный треугольник ABC : $AB = CB = 6$ см, $AC = 5$ см. Так как боковые грани образуют с плоскостью основания равные двугранные углы, то высота пирамиды опускается в центр

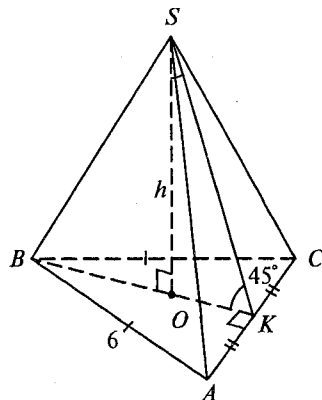


Рис. 23.11

окружности, вписанной в треугольник ABC , то есть в точку O , лежащую на высоте BK этого треугольника.

Тогда $AK = CK = 2,5$ см; $OK = r$, где r — радиус окружности, вписанной в основание пирамиды и $r = \frac{2S}{a+b+c}$.

Площадь треугольника ABC найдем по формуле Герона $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{5+6+6}{2} = 8,5$ (см) и

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{8,5 \cdot (8,5-5)(8,5-6)^2} = \frac{5\sqrt{119}}{4} \text{ (см}^2\text{)}. \text{ Следовательно}$$

$$r = \frac{5\sqrt{119}}{2 \cdot 17} = \frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{17}} \text{ (см)}.$$

Угол SKB — линейный угол двугранного угла $SACB$, так как $BK \perp AC$ и $SK \perp AC$, и согласно условию задачи $\angle SKB = 45^\circ$.

Значит треугольник SOB равнобедренный и $h = r = \frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{17}}$ см.

Согласно формуле $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h$ найдем объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{5\sqrt{119}}{4} \cdot \frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{17}} = \frac{25 \cdot 7}{24} = \frac{175}{24} \text{ (см}^3\text{)}.$$

Ответ: $\frac{175}{24} \text{ см}^3$.

Пример 4. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 6 см, а диагонали его боковых граней равны 4 и 5 см. Определите объем параллелепипеда.

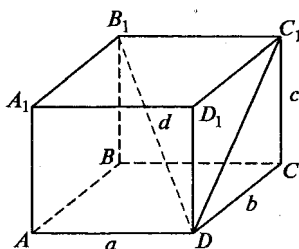


Рис. 23.12

Решение. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед (рис. 23.12), где a , b , c — три его измерения; $d = 6$ см — диагональ. Запишем свойство диагонали прямоугольного параллелепипеда: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Рассмотрим треугольник DCC_1 . Так как $DC_1 = 4$ см, то $b^2 + c^2 = 16$. Рассмотрим треугольник DAA_1 . Так как $A_1D = 5$ см, то $a^2 + c^2 = 25$.

Запишем и решим систему уравне-

$$\text{ний } \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 36, \\ b^2 + c^2 = 16, \\ a^2 + c^2 = 25. \end{cases} \quad \text{Из второго уравнения системы выразим } b^2:$$

$b^2 = 16 - c^2$. Из третьего уравнения выразим a^2 : $a^2 = 25 - c^2$. Подставим полученные значения a^2 и b^2 в первое уравнение системы и найдем значение c :

$$25 - c^2 + 16 - c^2 + c^2 = 36, c^2 = 5, c = \sqrt{5} \text{ см.}$$

Зная c , определим значения a и b : $b^2 = 16 - 5 = 11$, $b = \sqrt{11}$ см;
 $a^2 = 25 - 5 = 20$, $a = 2\sqrt{5}$ см.

Согласно формуле $V = abc$ найдем объем параллелепипеда. Получим $V = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{11} \cdot \sqrt{5} = 10\sqrt{11}$ (см³).

Ответ: $10\sqrt{11}$ см³.

Пример 5. Определите объем правильной четырехугольной призмы, если ее диагональ образует с плоскостью боковой грани угол 30° , а сторона основания равна 2.

Решение. Согласно условию задачи основанием призмы является квадрат со стороной 2 (рис. 23.13).

Так как отрезок AB_1 является проекцией диагонали призмы DB_1 на грань AA_1B_1B , то угол AB_1D является углом наклона диагонали призмы к плоскости боковой грани и $\angle AB_1D = 30^\circ$.

Рассмотрим треугольник AB_1D . По свойству катета лежащего против угла 30° запишем $B_1D = 4$.

Так как согласно свойству диагонали прямоугольного параллелепипеда $d^2 = AD^2 + AB^2 + AA_1^2$, то $16 = 4 + 4 + h^2$, $h^2 = 8$, $h = 2\sqrt{2}$.

Найдем объем призмы по формуле $V = S_{\text{осн}} h$. Получим

$$V = 4 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}.$$

Ответ: $8\sqrt{2}$.

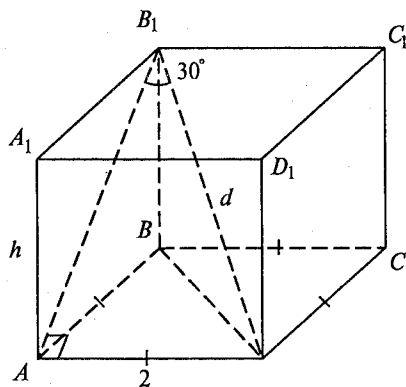


Рис. 23.13

Пример 6. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 119π , а объем его равен 7π . Найдите высоту этого цилиндра.

Решение. Площадь боковой поверхности и объем цилиндра найдем по формулам $S_{\text{бок.}} = 2\pi R h$ и $V = \pi R^2 h$, где R – радиус ос-

нования, h – высота цилиндра. Тогда согласно условию задачи запишем: $\begin{cases} 2\pi R h = 119, \\ \pi R^2 h = 7\pi. \end{cases}$ Разделим первое уравнение системы на второе и получим: $\frac{2\pi R h}{\pi R^2 h} = \frac{119}{7\pi}, \frac{2}{R} = \frac{17}{\pi}, R = \frac{2\pi}{17}$. Найдем h из первого уравнения системы: $h = \frac{119}{2\pi R} = \frac{119 \cdot 17}{2\pi \cdot 2\pi} = \frac{2023}{4\pi^2}$.

Ответ: $\frac{2023}{4\pi^2}$.

Пример 7. Радиус основания конуса равен $\sqrt{15}$, а угол при вершине в развертке его боковой поверхности равен 90° . Определите объем конуса.

Решение. Рассмотрим конус радиуса $R = \sqrt{15}$ (рис. 23.14) и развертку его боковой поверхности – круговой сектор радиуса l (рис. 23.15).

Найдем длину окружности в основании конуса $C_{окр.} = 2\pi R = 2\sqrt{15}\pi$ и длину дуги в развертке боковой поверхности конуса $C_{дуги} = \frac{2\pi l}{360^\circ} \cdot 90^\circ = \frac{\pi l}{2}$. Так как $C_{окр.} = C_{дуги}$, то $2\pi R = \frac{\pi l}{2}$ и $l = 4R = 4\sqrt{15}$.

Рассмотрим треугольник AOS . Согласно теореме Пифагора запишем: $h^2 = l^2 - R^2, h = \sqrt{16 \cdot 15 - 15} = 15$.

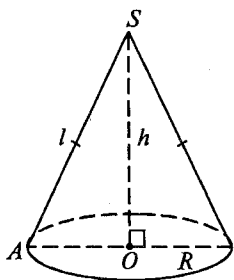


Рис. 23.14

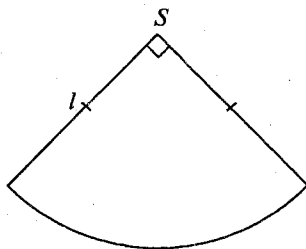


Рис. 23.15

Найдем объем конуса по формуле $V = \frac{1}{3} S_{осн} h$. Получим $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15 \cdot 15 = 75\pi$.

Ответ: 75π .

Пример 8. В конус, осевое сечение которого – равносторонний треугольник, вписан шар. Найдите объем конуса, если объем шара равен $\frac{9\pi}{16}$ см³.

Решение. Запишем формулу для нахождения объема шара: $V_{ш} = \frac{4}{3}\pi R_{ш}^3$. Радиус шара найдем, решая уравнение $\frac{4}{3}\pi R_{ш}^3 = \frac{9\pi}{16}$, откуда получим $R_{ш} = \frac{3}{4}$ см. Так как осевым сечением конуса является равносторонний треугольник ABC (рис. 23.16), то центр шара (точка O_1) лежит на высоте конуса и радиус шара равен радиусу r окружности, вписанной в треугольник ABC , т. е. $R_{ш} = r$.

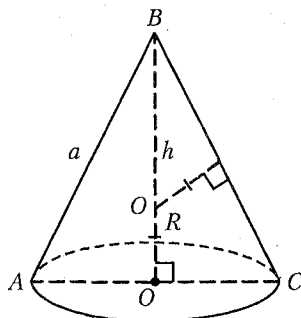


Рис. 23.16

В свою очередь радиус окружности, вписанной в правильный треугольник со стороной a , находят по формуле $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Следовательно, $a = 2\sqrt{3} \cdot r$, $a = 2\sqrt{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (см).

Найдем радиус основания конуса и его высоту:

$$R_{кон.} = \frac{1}{2} \cdot a = \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ (см);}$$

$$h_{кон.} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}, \quad h_{кон.} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{4} \text{ (см).}$$

Согласно формуле $V = \frac{1}{3}S_{осн}h$ найдем объем конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} \right)^2 \cdot \frac{9}{4} = \frac{81\pi}{64} \text{ (см}^3\text{)}.$$

Ответ: $\frac{81\pi}{64}$ см³.

Пример 9. Равнобедренная трапеция с основаниями 12 и 13 см и острым углом 60° вращается вокруг меньшего основания. Вычислите поверхность полученной фигуры вращения.

Решение. Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями $BC = 12$ см и $AD = 13$ см (рис. 23.17). Вращая трапецию вокруг основания BC , получим тело, боковая поверхность которого состоит из боковой поверхности цилиндра и боковой поверхности двух равных конусов: $S_{пов.} = S_{бок.цил.} + 2S_{бок.кон.}$. В трапеции $ABCD$ из вершин B и C проведем высоты BN и CM . Тогда

следовательно, его радиус является перпендикуляром к плоскостям граней, то есть $R_{\text{впис.}} = O_1O = O_1N$.

Так как $\triangle SOD \sim \triangle SNO_1$ ($\angle SNO_1 = \angle SOD = 90^\circ$ и $\angle S$ – общий), то запишем $\frac{OD}{NO_1} = \frac{SD}{SO_1}$ или $\frac{r}{R_{\text{впис.}}} = \frac{SD}{R_{\text{опис.}}}$, откуда $R_{\text{опис.}} = \frac{R_{\text{впис.}} \cdot SD}{r}$.

Длину отрезка SD найдем по теореме Пифагора из треугольника SDB : $SD = \sqrt{SB^2 - DB^2}$, $CD = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Найдем отношение радиусов описного около тетраэдра и вписанного в тетраэдр шаров:

$$\frac{R_{\text{опис.}}}{R_{\text{впис.}}} = \frac{R_{\text{впис.}} \cdot SD}{r \cdot R_{\text{впис.}}} = \frac{SD}{r} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}}{2a} = 3.$$

Ответ: 3.

Задачи для самостоятельного решения

1. Из точки, квадрат расстояния от которой до плоскости равен 50, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы в 45° . Расстояние между основаниями наклонных равно 10. Найдите угол между наклонными.

2. На ребре двугранного угла, равного 120° , взят отрезок AB . Из его концов в различных гранях к нему восстановлены перпендикуляры AC длиной 1 см и BD длиной 2 см. Расстояние между точками C и D равно 4 см. Вычислите длину отрезка AB .

3. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 3 и 4, а угол между ними содержит 120° . Большая диагональ основания равна меньшей диагонали параллелепипеда. Найдите объем параллелепипеда.

4. В основании наклонной призмы лежит параллелограмм со сторонами 3 и 6 дм и острым углом 45° . Боковое ребро призмы наклонено к плоскости основания под углом 30° . Объем призмы равен $18\sqrt{2}$ дм³. Найдите длину бокового ребра.

5. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб. Плоскость, проведенная через одну из сторон нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания, образует с плоскостью основания угол 45° . Полученное сечение имеет площадь, равную $2\sqrt{2}$. Определите боковую поверхность параллелепипеда.

6. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм со сторонами 0,1 и 0,4 дм и тупым углом 120° . Большая диагональ параллелепипеда равна 50 мм. Определите его объем.

7. Определите объем правильной шестиугольной призмы, у которой наибольшая диагональ равна $\sqrt{3}$, а боковые грани – квадраты.

8. Найдите объем куба, если расстояние от его диагонали до непересекающегося с ней ребра равно 1.

9. Основание призмы – квадрат со стороной, равной $4 - \sqrt{3}$. Одна из боковых граней – также квадрат, другая – ромб с углом 60° . Определите полную поверхность призмы.

10. Основанием параллелепипеда служит квадрат со стороной, равной 2. Одна из вершин верхнего основания одинаково отстоит от всех вершин нижнего основания и удалена от плоскости этого основания на расстояние, равное $\sqrt{3}$. Определите полную поверхность параллелепипеда.

11. Определите объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна $\sqrt{2}$ и составляет с одной гранью угол 30° , а с другой – 45° .

12. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб, площадь которого равна 5. Площади диагональных сечений равны 3 и 4. Определите объем и боковую поверхность параллелепипеда.

13. Наибольшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна d и составляет с плоскостью основания угол 60° . Найдите объем призмы.

14. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны $\sqrt{5}$ и 5. Диагональ параллелепипеда наклонена к боковой грани, содержащей сторону основания, равную $\sqrt{5}$, под углом 60° . Найдите объем параллелепипеда.

15. Основанием наклонной треугольной призмы служит равносторонний треугольник со стороной 10, боковое ребро призмы равно стороне основания и наклонено к плоскости основания под углом 60° . Найдите объем призмы.

16. Найдите объем правильной треугольной призмы со стороной основания a , если площадь основания призмы равна половине площади ее боковой поверхности.

17. В правильной треугольной призме площадь сечения, проходящего через боковое ребро перпендикулярно противоположной боковой грани, равна $\sqrt{3}$. Сторона основания призмы равна $\sqrt{2}$. Найдите полную поверхность призмы.

18. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 10 см и образует с плоскостью основания угол 60° . Боковая поверхность параллелепипеда равна $70\sqrt{3}$ см². Найдите площадь основания.

19. Определите объем прямоугольного параллелепипеда, если его диагональ равна 2, а длины ребер относятся как 1:2:3.

20. Площади боковых граней прямой треугольной призмы равны 3, 4 и 5. Ее боковое ребро равно 6. Определите объем призмы.

21. Площадь основания и объем правильной четырехугольной призмы соответственно равны 18 и 15. Вычислите ее полную поверхность.

22. Найдите боковую поверхность правильной треугольной призмы с высотой 7, если прямая, проходящая через центр верхнего основания и точку K — середину стороны нижнего основания, наклонена к плоскости боковой грани, содержащую точку K , под углом 30° .

23. Правильная шестиугольная призма, боковые ребра которой равны 3 см, рассечена диагональной плоскостью на две равные четырехугольные призмы. Определите боковую поверхность четырехугольной призмы, если объем шестиугольной призмы равен $18\sqrt{3}$ см³.

24. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно высоте основания, а площадь сечения, проведенного через это ребро и высоту основания, равна $3\sqrt{3}$. Определите объем призмы.

25. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 6 и 4 и образуют угол 30° . Боковая поверхность равна 2. Определите объем параллелепипеда.

26. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда относятся как 0,2:0,3, а диагональное сечение представляет собой квадрат с площадью, равной 9. Определите объем параллелепипеда.

27. Измерения прямоугольного параллелепипеда 6, 2, и 3. Найдите площадь грани такого куба, чтобы объемы этих тел относились как их поверхности.

28. Определите объем наклонной треугольной призмы, у которой площадь одной из боковых граней равна 4, а расстояние от плоскости этой грани до противоположащего ребра равно 6.

29. Куб объемом $64\sqrt[4]{27}$ пересечен плоскостью, проходящий через середины трех его ребер, выходящих из одной вершины. Найдите площадь сечения.

30. Вычислите объем правильного тетраэдра, если радиус окружности, описанной около его грани, равен 8.

31. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , а двугранный угол при основании равен 45° . Определите объем и полную поверхность пирамиды.

32. Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен 90° . Найдите квадрат отношения площади основания пирамиды к ее боковой поверхности.

33. Основанием правильной пирамиды служит шестиугольник. Боковое ребро, равное $\sqrt[3]{2}$, составляет с высотой пирамиды угол 30° . Определите объем пирамиды.

34. Диагональ квадрата, лежащего в основании правильной четырехугольной пирамиды, равна ее боковому ребру и равна 2. Найдите полную поверхность пирамиды и ее объем.

35. Апофема правильной шестиугольной пирамиды равна $\sqrt[4]{3}$, а боковая грань пирамиды наклонена к плоскости ее основания под углом 60° . Найдите полную поверхность пирамиды.

36. Найдите полную поверхность правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна a , если апофема пирамиды образует с ее высотой угол 30° .

37. Основание четырехугольной пирамиды – прямоугольник с диагональю, равной $\sqrt{6}$, и углом 120° между диагоналями. Каждое из боковых ребер образует с плоскостью основания угол 45° . Найдите объем пирамиды.

38. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 1 см, а ее боковая поверхность равна 3 см^2 . Найдите объем пирамиды.

39. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 3, 3 и 5. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60° . Определите объем пирамиды.

40. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 11, а высота равна 7. Определите объем пирамиды.

41. Основаниями правильной усеченной пирамиды служат квадраты со сторонами 8 и 6. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45° . Определите объем усеченной пирамиды.

42. Боковые ребра правильной усеченной треугольной пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60° . Стороны нижнего и верхнего оснований равны соответственно a и b ($a > b$). Найдите объем усеченной пирамиды.

43. Определите диагональ правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если ее объем равен 872 см^3 , а длины сторон оснований 14 и 10 см.

44. Определите объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 45° , а площадь диагонального сечения равна 81.

45. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом 30° . Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° . Определите объем и полную поверхность пирамиды, если радиус вписанного в ромб круга равен 1.

46. Объем правильной треугольной пирамиды равен 9 см^3 , двугранные углы при основании равны 45° . Найдите полную поверхность пирамиды.

47. В треугольной пирамиде боковые ребра взаимно перпендикулярны и имеют длины $\sqrt{12}$, $\sqrt{15}$ и $\sqrt{18}$ см. Найдите объем пирамиды.

48. Высота правильного тетраэдра равна h . Вычислите его полную поверхность.

49. Каждое из боковых ребер пирамиды равно 4. Ее основанием служит прямоугольный треугольник, катеты которого относятся как 3:4, а гипотенуза равна 6. Вычислите объем пирамиды.

50. В основании пирамиды лежит квадрат. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом 45° . Среднее по величине боковое ребро равно $\sqrt{2}$. Найдите объем и полную поверхность пирамиды.

51. По стороне основания, равной a , определите боковую поверхность и объем правильной четырехугольной пирамиды, у которой площадь диагонального сечения равна площади основания.

52. Найдите отношение объема правильной шестиугольной пирамиды к объему правильной треугольной пирамиды, если стороны оснований этих пирамид равны и в 2 раза меньше их апофем.

53. В пирамиде $FACB$ через медиану BK основания ABC и середину L бокового ребра FA проведена плоскость. Найдите отношение объема многогранника $BCKLF$ к объему пирамиды $ABKL$.

54. В правильном тетраэдре $SABC$ построено сечение, проходящее через ребро AC и точку K , принадлежащую ребру SB , причем длина отрезка BK в два раза больше длины отрезка KS . Найдите объем пирамиды $KABC$, если ребро тетраэдра равно 3.

55. Цилиндр образован вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. Найдите объем цилиндра, если площадь прямоугольника равна 15, а длина окружности, описанной точкой пересечения его диагоналей, равна 15π .

56. Высота конуса равна диаметру его основания. Найдите отношение площади его основания к боковой поверхности.

57. Найдите объем конуса, если его боковая поверхность равна 3 и расстояние от центра основания до образующей равно 1.

58. Высота конуса разделена на три равных отрезка и через точки деления параллельно основанию проведены плоскости, разбивающие конус на три части. Найдите объем среднего усеченного конуса, если объем данного конуса равен V .

59. Боковая поверхность конуса развернута на плоскости в сектор, центральный угол которого содержит 120° , а ее площадь равна 6π . Найдите объем конуса.

60. Вычислите поверхность тела, полученного при вращении ромба площадью $\frac{4}{\pi}$ вокруг одной из его сторон.

61. На отрезке AB как на диаметре построена полуокружность с центром в точке O , а на отрезках OA и OB построены полуокружности, расположенные в той же полуплоскости с границей AB , что и первая. Найдите отношение объема и поверхности тела, которое образовано вращением вокруг AB фигуры, ограниченной этими полуокружностями, если $AB = 20$ см.

62. Металлический шар переплавлен в конус, площадь основания которого в 3 раза меньше площади боковой поверхности. Высота конуса равна 4. Найдите диаметр шара.

63. Определите объем октаэдра (правильного восьмигранника), ребро которого равно $3\sqrt{2}$.

64. Центр верхнего основания правильной четырехугольной призмы и середины сторон нижнего основания служат вершинами вписанной в призму пирамиды, объем которой равен 6. Найдите объем призмы.

65. На основаниях цилиндра с квадратным осевым сечением построены два конуса с вершинами в середине оси цилиндра. Найдите сумму полных поверхностей конусов, если высота цилиндра равна $2(\sqrt{2}-1)$.

66. Определите объем шара, вписанного в правильную пирамиду, у которой высота равна 3, а двугранный угол при основании равен 60° .

67. Конус и полушар имеют общее основание, радиус которого равен 5. Найдите боковую поверхность конуса, если его объем равен объему полушара.

68. Найдите отношение поверхности и объема шара соответственно к поверхности и объему вписанного в шар куба.

69. Найдите отношение поверхности и объема шара соответственно к полной поверхности и объему описанного вокруг него конуса с равносторонним осевым сечением.

70. Определите поверхность шара, описанного около конуса, у которого радиус основания равен 2, а высота равна 4.

71. В шар вписан конус, образующая которого равна диаметру основания. Найдите отношение поверхности шара к полной поверхности конуса.

72. Металлический шар радиуса $\sqrt[3]{2}$ переплавлен в конус, площадь основания которого в 3 раза меньше боковой поверхности. Вычислите высоту конуса.

73. Осевое сечение конуса – равносторонний треугольник. Найдите отношение объема вписанного в конус шара к объему конуса.

- Ответы:** 1. 60° . 2. 3 см. 3. $36\sqrt{2}$. 4. 4 дм. 5. 8. 6. $4\sqrt{3}$ см³.
 7. $\frac{27\sqrt{5}}{50}$. 8. $2\sqrt{2}$. 9. $13(4-\sqrt{3})$. 10. 24. 11. 0,5. 12. $\sqrt{30}$; 10. 13. $\frac{9d^3}{64}$.
 14. $\frac{25\sqrt{6}}{3}$. 15. 375. 16. $0,125a^3$. 17. $6+\sqrt{3}$. 18. 12 см². 19. $\frac{12\sqrt{14}}{49}$.
 20. 1. 21. $36+10\sqrt{2}$. 22. 294. 23. 30 см². 24. $3\sqrt[4]{27}$. 25. 1,2. 26. $\frac{162}{13}$.
 27. 9. 28. 12. 29. 6. 30. $128\sqrt{6}$. 31. $\frac{a^3}{24}$; $\frac{a^2\sqrt{3}(1+\sqrt{2})}{4}$. 32. $\frac{1}{3}$. 33. $\frac{3}{8}$.
 34. $2+2\sqrt{7}$; $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 35. 4,5. 36. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. 37. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. 38. $\frac{\sqrt{47}}{24}$ см³.
 39. $\frac{15\sqrt{3}}{4}$. 40. $126\sqrt{3}$. 41. $\frac{148\sqrt{2}}{3}$. 42. $\frac{(a^3-b^3)\sqrt{3}}{12}$. 43. 18 см. 44. 486.
 45. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$; 24. 46. $9\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$ см². 47. $6\sqrt{10}$ см³. 48. $1,5h^2\sqrt{3}$.
 49. $\frac{72\sqrt{7}}{25}$. 50. $\frac{1}{3}$; $2+\sqrt{2}$. 51. $3a^2$; $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. 52. $\frac{6\sqrt{1833}}{47}$. 53. 3.
 54. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 55. 225π . 56. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. 57. 1. 58. $\frac{7V}{27}$. 59. $\frac{8\pi}{3}$. 60. 16. 61. $\frac{5}{3}$ см.
 62. $2\sqrt[3]{2}$. 63. 36. 64. 36. 65. $8\pi(\sqrt{2}-1)$. 66. $\frac{4\pi}{3}$. 67. $\pi 25\sqrt{5}$.
 68. $S_1:S_2=\pi:2$; $V_1:V_2=\pi\sqrt{3}:2$. 69. $S_1:S_2=V_1:V_2=4:9$. 70. 25π .
 71. 16:9. 72. 4. 73. $\frac{4}{9}$.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Площадь боковой поверхности конуса равна $2\pi\sqrt{13}$. Если радиус конуса в полтора раза меньше его высоты, то площадь основания конуса равна	1) 4π ; 2) 6π ; 3) $4\pi\sqrt{3}$; 4) $2\pi\sqrt{3}$; 5) 12π .
2	Диагональ правильной четырехугольной призмы образует угол 30° с боковым ребром. Во сколько раз суммы площадей оснований призмы меньше площади ее боковой поверхности?	1) $2\sqrt{2}$; 2) $2\sqrt{3}$; 3) $2\sqrt{6}$; 4) $\sqrt{3}$; 5) $\sqrt{6}$.
3	Площадь боковой поверхности цилиндра равна 30. Если осевым сечением цилиндра является квадрат, то площадь полной поверхности цилиндра равна	1) 32; 2) 52; 3) 36; 4) 45; 5) 30.
4	Вершины прямоугольного треугольника с катетами 5 и 6 лежат на поверхности сферы. Если площадь сферы равна 125π , то расстояние от центра сферы до плоскости треугольника равно	1) π ; 2) 31,24; 3) 4; 4) 9,3; 5) 23,5.
5	В равнобедренном треугольнике ABC с основанием $AB=6$ и боковой стороной $BC=5$ из центра O , вписанной в треугольник окружности, восстановлен перпендикуляр OK к плоскости треугольника ABC . Если расстояние от точки K до прямой AB равно 3,5, то длина отрезка OK равна	1) 10; 2) $\sqrt{10}$; 3) $\sqrt{19}$; 4) 5,5 5) 25.
6	В правильной треугольной пирамиде боковое ребро образует с высотой угол 60° . Если площадь боковой поверхности пирамиды равна $3\sqrt{7}$, то сторона ее основания равна	1) 4; 2) 2,9; 3) $2\sqrt{7}$; 4) 3; 5) $2\sqrt{3}$.

№	Задания	Варианты ответов
7	В треугольную пирамиду вписан конус, площадь основания которого равна π . Если площадь боковой поверхности пирамиды равна $7\sqrt{10}$, а объем пирамиды равен 7, то периметр ее основания равен	1) 14; 2) 7,7; 3) 21; 4) $7\sqrt{7}$; 5) $2\sqrt{10}$.
8	В конус вписана пирамида $SABCD$, основанием которой служит трапеция $ABCD$. Если угол BAD равен 45° , основания трапеции $BC=6$, $AD=30$, а образующая конуса равна $\sqrt{810}$, то высота пирамиды равна	1) 12; 2) 24; 3) 26; 4) $6\sqrt{10}$; 5) $3,25\sqrt{10}$.
9	Если около правильной треугольной призмы, сторона основания которой вдвое меньше высоты, описать шар, то отношение объема шара к объему призмы будет равно	1) $\frac{64\pi}{27}$; 2) $2\pi\sqrt{3}$; 3) π ; 4) 18π ; 5) 32.
10	Площадь основания правильной треугольной пирамиды равна $9\sqrt{3}$, а ее боковое ребро равно $3\sqrt{2}$. Если через сторону основания пирамиды перпендикулярно противоположащему боковому ребру провести плоскость, то площадь полученного сечения будет равна	1) 9,5; 2) 9; 3) 10; 4) 12,2; 5) $6\sqrt{10}$.
11	В прямой параллелепипед, объем которого равен 36, вписана сфера. Если половина одной из сторон основания параллелепипеда равна 2, то диаметр сферы равен	1) 6; 2) 10; 3) 4,5; 4) 4; 5) 3.
12	Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция $ABCD$ со сторонами $AB=CD=13$ см, $BC=11$ см и $AD=21$ см. Если объем призмы равен 1728 см ³ , то площадь ее диагонального сечения равна	1) 72 см ² ; 2) 180 см ² ; 3) 222 см ² ; 4) 150 см ² ; 5) 70 см ² .

№	Задания	Варианты ответов
13	В основании четырехугольной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Ребро PB перпендикулярно плоскости основания и имеет длину $\sqrt{2}$. Точка M – середина ребра PC . Если плоскость BMD образует с плоскостью основания пирамиды угол 45° , то площадь треугольника BMD равна	1) $2\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{12}$; 3) 2; 4) 12; 5) 1.
14	В конус вписан шар радиуса 1. Если образующая конуса видна из центра вписанного в конус шара под углом α , то радиус шара, описанного около конуса, равен	1) $\sin 4\alpha$; 2) $\frac{\sin 3\alpha}{3}$; 3) $-\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin 4\alpha}$; 4) $2\cos \alpha$; 5) $5\cos \alpha$.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7
Номер правильного ответа	1	3	4	3	2	5	1
Номер задания	8	9	10	11	12	13	14
Номер правильного ответа	2	1	2	5	2	5	3